

**ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ  
ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**1. Общие сведения**

1.	Кафедра	Математики, физики и информационных технологий
2.	Направление подготовки	01.03.02 Прикладная математика и информатика
3.	Направленность (профиль)	Управление данными и машинное обучение
4.	Дисциплина (модуль)	Б1.О.15.01 Математический анализ
5.	Форма обучения	очная
6.	Год набора	2021

**2. Перечень компетенций**

– <b>ОПК-1:</b> Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности
---

### 3. Критерии и показатели оценивания компетенций на различных этапах их формирования

Этапы формирования компетенций (разделы, темы дисциплины)	Формируемая компетенция	Критерии и показатели оценивания компетенций			Формы контроля сформированности компетенций
		Знать:	Уметь:	Владеть:	
1. Основные структуры элементарной математики	ОПК-1	<p>основные объекты элементарной математики, их характеристики и свойства;</p> <p>приемы преобразования числовых, алгебраических и трансцендентных выражений;</p> <p>основные методы решений уравнений, неравенств и систем;</p>	<p>делать точные и приближенные вычисления;</p> <p>составлять математические модели несложных текстовых задач;</p> <p>проводить доказательства утверждений методом математической индукции;</p>	<p>первоначальными представлениями об идеях и методах математики как универсальном языке науки и техники</p> <p>понятийным аппаратом основных структур элементарной математики</p>	Вводная самостоятельная работа, самостоятельные работы (СР) №№ 1-2, контрольное домашнее задание (КДЗ) № 1 с защитой в аудитории.
2. Введение в математический анализ	ОПК-1	<p>основные понятия теории множеств;</p> <p>числовые функции, их характеристики и графики;</p> <p>комплексные числа и арифметические действия над ними;</p>	<p>проводить доказательства основных теоретических фактов с использованием математической символики;</p> <p>решать алгебраические уравнения на множестве комплексных чисел</p>	<p>понятийным аппаратом теории множеств;</p> <p>методами анализа свойств числовых функций и построения их графиков;</p> <p>способами представления комплексных чисел</p>	СР №№ 3-4, КР № 1, КДЗ № 2, коллоквиум № 1
3. Пределы и непрерывность функций одной переменной (ФОП)	ОПК-1	<p>определения ключевых понятий: предел числовой последовательности, предел ФОП в точке, точка сгущения множества, бесконечно малая, бесконечно большая и локально ограниченная функция, непрерывная ФОП ;</p> <p>основные теоремы о предельных поведении ФОП и о непрерывных функциях в точке и на отрезке;</p> <p>признаки существования предела функции;</p> <p>замечательные пределы;</p> <p>сравнение бесконечно малых функций;</p>	<p>читать по графику предельное поведение ФОП в различных точках сгущения ее области задания;</p> <p>находить значения предела функции в точке по основным теоремам о предельных поведении функций;</p> <p>раскрывать различные неопределенности, в том числе с помощью замечательных пределов и заменой эквивалентных бесконечно малых;</p> <p>исследовать непрерывность ФОП, заданных аналитически;</p>	<p>различными формулировками определений ключевых понятий, понимать их эквивалентности;</p> <p>способами доказательства основных теорем и свойств;</p> <p>умением записывать определения и утверждения, используя математическую символику;</p> <p>способностью иллюстрировать графически значение предела ФОП в точке;</p> <p>компьютерными программами для построения графиков ФОП;</p>	СР №№ 5-6, КР № 2, коллоквиум № 2
4. Дифференциальное исчисление ФОП и его основные приложения	ОПК-1	<p>определения ключевых понятий: производная, дифференциал, правила дифференцирования, таблица производных ФОП;</p> <p>геометрическая трактовка и физический смысл производной и дифференциала;</p> <p>- основные теоремы о дифференцируемых</p>	<p>проводить практическое дифференцирование функций, имеющих явное, неявное или параметрическое задание;</p> <p>использовать правило Лопиталя для вычисления пределов;</p>	<p>методами вывода правил дифференцирования и табличных производных ФОП, доказательствами теорем и свойств о дифференцируемых ФОП;</p> <p>навыками математического</p>	СР №№ 7-8, КДЗ № 3

Этапы формирования компетенций (разделы, темы дисциплины)	Формируемая компетенция	Критерии и показатели оценивания компетенций			Формы контроля сформированности компетенций
		Знать:	Уметь:	Владеть:	
		<p>ФОП;</p> <p>определение гладкой функции и её свойства;</p> <p>асимптотическое поведение функции;</p> <p>связь свойств монотонности, выпуклости/вогнутости, локальных экстремумов и точек перегиба функции со значениями её производных;</p> <p>аппроксимацию ФОП по формуле Тейлора;</p>	<p>проводить исследование свойств ФОП, используя её производные;</p> <p>решать текстовые, физические или геометрические задачи, моделируемые функциями одной переменной;</p> <p>строить многочлен Тейлора для некоторых несложных функций, наблюдать на графиках и описывать смысл аппроксимации;</p>	<p>моделирования задач на экстремальные значения, задач физики или геометрии;</p> <p>расчетной частью материала, относящегося к вектор-функции скалярного аргумента;</p> <p>навыками работы с компьютерной обучающей программой «Исследование функций и построение графиков»;</p> <p>опытом работы в малых группах;</p>	
5. Интегральное исчисление ФОП	ОПК-1	<p>определения ключевых понятий: первообразная ФОП, неопределённый интеграл, определенный интеграл Римана, несобственные интегралы первого и второго рода, интегралы с параметрами – и их свойства;</p> <p>геометрические трактовки определенного интеграла и несобственных интегралов;</p> <p>-основные классы функций, интегрируемых по Риману;</p> <p>основные приемы интегрирования ФОП;</p> <p>общую методику приложений интегрального исчисления;</p>	<p>проводить практическое интегрирование функций, в том числе с использованием прикладных математических пакетов;</p> <p>применять методику приложений интегрального исчисления к решению задач геометрии и физики;</p> <p>провести интерпретацию решения прикладной задачи и обоснование его достоверности или правдоподобности;</p> <p>провести доказательство основных свойств определенного интеграла на основании его определения как конечного предела интегральных сумм Римана;</p>	<p>различными подходами к построению теории интегрального исчисления;</p> <p>методами обоснования утверждений, теорем и свойств, используя, в том числе, геометрические интерпретации;</p> <p>критериями определения прикладной задачи, которую можно решить с помощью интегрального исчисления;</p> <p>навыками работы с компьютерной обучающей программой «Неопределенные интегралы»;</p> <p>опытом работы в малых группах;</p>	<p>СР № 9, КДЗ № 4, коллоквиум № 3, экзамен</p>
6. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных (ФНП)	ОПК-1	<p>определения ключевых понятий: частные производные, полный дифференциал, дифференцируемая ФНП;</p> <p>связь полного дифференциала с полным приращением и значение этой связи для приложений;</p> <p>дифференцирование сложных ФНП, понятие полной производной;</p> <p>-постановку и идею решения экстремальных задач для функции двух переменных;</p>	<p>практически находить частные производные, понимать их смысл и использовать в решении задач;</p> <p>применять полные дифференциалы для вывода формул, по которым вычисляются абсолютная и относительная погрешности расчетных выражений;</p> <p>построить алгоритм решения и</p>	<p>пониманием теории ФНП как обобщением теории ФОП;</p> <p>методами обоснования утверждений и теорем, характерных сугубо для ФНП;</p> <p>простейшими элементами дифференциальной геометрии поверхностей, уметь их построить, в том числе с использованием компьютерных программ;</p>	<p>СР № 10, КДЗ № 6, экзамен</p>

Этапы формирования компетенций (разделы, темы дисциплины)	Формируемая компетенция	Критерии и показатели оценивания компетенций			Формы контроля сформированности компетенций
		Знать:	Уметь:	Владеть:	
		трактовку ФНП как скалярного поля, понятия линий и поверхностей уровня, производной по направлению и градиента;	<p>провести его реализацию в задаче на глобальный экстремум функции двух переменных, заданной на компакте, и в задаче на условный экстремум такой же функции;</p> <p>найти характеристики скалярного поля, провести их геометрическую интерпретацию и описание смысла;</p>	<p>алгоритмом построения многочлена Тейлора для функции двух переменных;</p> <p>опытом реализации метода наименьших квадратов в задаче обработки экспериментальных данных;</p>	
7.Интегральное исчисление ФНП. Элементы векторного анализа	ОПК-1	<p>определения ключевых понятий: двойной интеграл, тройной интеграл, криволинейные интегралы первого и второго рода, интегралы по поверхности первого и второго рода – их основные свойства, физические трактовки, алгоритмы вычисления и основные приложения;</p> <p>основные элементы теории векторных полей как важную сферу приложений интегралов от ФНП;</p> <p>связь между различными интегралами по формулам Грина, Остроградского-Гаусса и Стокса;</p> <p>дифференциальный векторный оператор Гамильтона и правила работы с ним;</p> <p>формулу замены переменных кратных интегралах;</p>	<p>проводить вычисление значений интегралов от ФНП, в том числе с использованием прикладных математических пакетов;</p> <p>использовать различные системы координат для упрощения вычислений;</p> <p>применять общую методику приложений интегрального исчисления и выводить расчетные формулы в решениях задач геометрии и физики;</p> <p>находить основные характеристики векторных полей и объяснять смысл их значений;</p> <p>использовать формулы Грина, Остроградского-Гаусса и Стокса для упрощения в вычислениях интегралов от ФНП или для проверки их значений;</p> <p>работать с оператором «набла»;</p>	<p>пониманием аналогии и различий в построении интегрального исчисления от ФОП и от ФНП;</p> <p>обоснованием основных свойств интегралов от ФНП, аналогичных интегралу Римана от ФОП;</p> <p>методами обоснования утверждений, которые относятся сугубо к интегралам от ФНП;</p> <p>навыками геометрических построений поверхностей и линий в трехмерных системах координат, в том числе с использованием пакетов компьютерных программ;</p> <p>опытом коллективной работы в группе и опытом экспертизы качества выполненных работ;</p>	СР № 11, КДЗ № 7, коллоквиум № 4
8.Числовые и функциональные ряды. Элементы гармонического анализа	ОПК-1	<p>определения ключевых понятий: ряд, сходимость или расходимость ряда, сумма сходящегося ряда, абсолютная и условная сходимости, область сходимости / расходимости функционального ряда, область равномерной сходимости, степенной ряд и его свойства, ряд Тейлора или Маклорена, тригонометрический ряд Фурье, интеграл Фурье;</p> <p>необходимый и набор достаточных признаков</p>	<p>исследовать практически сходимость числовых рядов с помощью необходимого и достаточных признаков;</p> <p>находить приближенное значение суммы числового ряда с наперед заданной точностью;</p> <p>устанавливать область сходимости / расходимости</p>	<p>навыками доказательства утверждений и формулирования логической связи между ними;</p> <p>практическим навыком обосновывать любой результат исследования теоретическим фактом, на основании которого этот результат получен;</p> <p>элементами математической</p>	СР № 12, КР № 3, КДЗ № 8, зачёт, курсовая работа

Этапы формирования компетенций (разделы, темы дисциплины)	Формируемая компетенция	Критерии и показатели оценивания компетенций			Формы контроля сформированности компетенций
		Знать:	Уметь:	Владеть:	
		<p>сходимости / расходимости числовых рядов;</p> <p>признак Вейерштрасса равномерной сходимости;</p> <p>свойства степенных рядов и структуру их областей сходимости / расходимости;</p> <p>условия для представления функции рядом Тейлора;</p> <p>элементы гармонического анализа функций, проявляющегося через их представления тригонометрическим рядом Фурье или интегралом Фурье.</p>	<p>степенного ряда, в некоторых случаях находить его сумму;</p> <p>составить представление заданной ФОП в виде степенного ряда и уметь его использовать, например, в операции интегрирования функции;</p> <p>составить представление заданной ФОП в виде тригонометрического ряда Фурье или в виде интеграла Фурье и уметь использовать это представление для определения спектральных характеристик функции;</p> <p>провести сравнительный анализ условий представления функции различными рядами и сходимости этих рядов.</p>	<p>культуры, проявляющихся полными, четкими и лаконичными рассуждениями в теории и в решении задач;</p> <p>навыками самостоятельного разбора и систематизации теоретических фактов;</p> <p>широкими возможностями использовать компьютерные программы и математические пакеты для получения числовых и графических данных в работе над учебными и прикладными практическими заданиями.</p>	

### Шкала оценивания в рамках балльно-рейтинговой системы

«неудовлетворительно» – 60 баллов и менее;

«удовлетворительно» – 61-80 баллов

«хорошо» – 81-90 баллов

«отлично» – 91-100 баллов

#### 4. Критерии и шкалы оценивания

##### 1. Решение задач самостоятельной работы в аудитории

- 4 балла выставляется, если студент решил все рекомендованные задачи.
- 3 балла выставляется, если студент решил не менее 80% рекомендованных задач.
- 2 балла выставляется, если студент решил не менее 50% рекомендованных задач.
- 1 балл выставляется, если студент решил не менее 30% рекомендованных задач.
- 0-1 балл - если студент выполнил менее 30% задания.

##### 2. Решение задач контрольной работы (аудиторной) или контрольного домашнего задания

- 10 баллов выставляется, если студент решил все рекомендованные задачи.
- 7-9 баллов выставляется, если студент решил не менее 80% рекомендованных задач.
- 4-6 баллов выставляется, если студент решил не менее 50% рекомендованных задач.
- 2-3- баллов выставляется, если студент решил не менее 30% рекомендованных задач.
- 0-1 балл - если студент выполнил менее 30% задания.

##### 3. Коллоквиум

- 8-10 баллов выставляется, если студент ответил на все основные и некоторые (все) дополнительные вопросы.
- 5-7 баллов выставляется, если студент ответил на все основные вопросы, но опустил некоторые важные детали и/или не ответил ни на один дополнительный.
- 3-4 балла выставляется, если студент ответил на половину основных вопросов.
- 0-2 балла - если студент не ответил на вопросы или ответил частично.

#### 5. Типовые контрольные задания и методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

##### Контрольная работа по разделу 3 "Пределы и непрерывность ФОП" (0-й вариант)

###### Задача 1

Вычислите  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , ответы проиллюстрируйте возможным локальным поведением графика функции  $y = f(x)$  в окрестности точки  $x = a$ , опишите смысл иллюстрации:

$$\begin{array}{ll} 1) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 4x - 1}); & 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x + 2}{3x - 1} \right)^{2x}; \\ 3) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x - 1}{x^2 - 3} \right)^{\frac{1}{x^2 - 4}}; & 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x+1} - 2}{\ln(1 + x + x^2)}. \end{array}$$

###### Задача 2

Сравните бесконечно малые функции при  $x \rightarrow a$ :

$$\begin{array}{l} 1) \alpha(x) = \sin^2(x - 2), \beta(x) = \sqrt{6 - x} - 2, a = 2; \\ 2) \alpha(x) = (2x^2 - x - 1)\sin x, \beta(x) = \cos x - \cos 1, a = 1. \end{array}$$

###### Задача 3

Даны две функции:

$$1) y = f(x): \begin{cases} y = x^2, & x \leq 1 \\ y = 2, & 1 < x < 3 \\ y = x - 1, & x > 3 \end{cases}, \quad 2) y = \frac{x^3 - 1}{x - 4}.$$

Задание для функции 1): построить график и провести описание свойства непрерывности.

Задание для функции 2): провести исследование на непрерывность, построить график функции в окрестности каждой точки разрыва.

### Задача 4

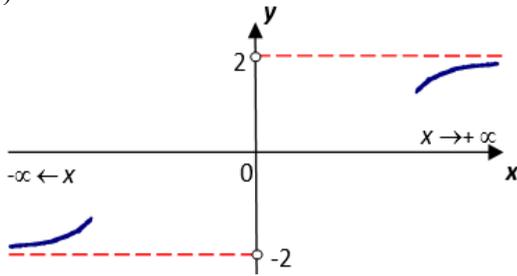
Используя строгое определение предела функции по Коши (на языке " $\varepsilon - \delta$ "), докажите, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2}.$$

### Ответы к задачам 0-го варианта контрольной работы

#### Задача 1

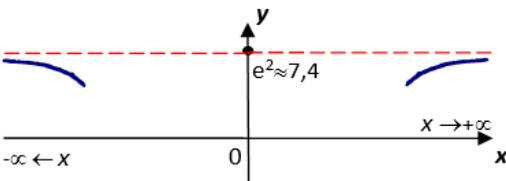
1)



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 4x - 1} \right) = \begin{cases} 2, & \text{если } x \rightarrow +\infty \\ -2, & \text{если } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

значения функции  $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 4x - 1}$  становятся сколь угодно близкими к числу 2 при достаточно больших положительных значениях  $x$  и становятся сколь угодно близкими к числу -2 при достаточно больших по модулю отрицательных значениях  $x$ .

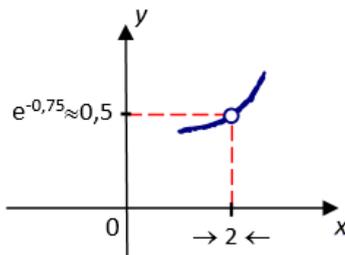
2)



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+2}{3x-1} \right)^{2x} = e^2 \approx 7,4;$$

значения функции  $f(x) = \left( \frac{3x+2}{3x-1} \right)^{2x}$  становятся сколь угодно близкими к числу  $e^2$ , если значения аргумента  $x$  будут достаточно большими по модулю.

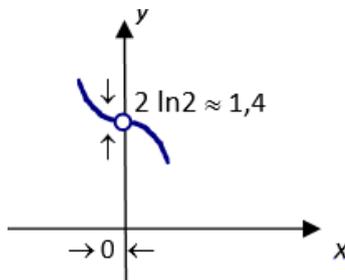
3)



$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x-1}{x^2-3} \right)^{\frac{1}{x^2-4}} = e^{-\frac{3}{4}} \approx 0,5;$$

значения функции  $f(x) = \left( \frac{x-1}{x^2-3} \right)^{\frac{1}{x^2-4}}$  сколь

угодно мало отличаются от числа  $e^{-\frac{3}{4}}$  для значений аргумента  $x$ , достаточно близких к числу 2 (но  $x = 2 \notin \text{ООФ} \Rightarrow f(2)$  не существует).



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x+1} - 2}{\ln(1 + x + x^2)} = 2 \ln 2 \approx 1,4;$$

значения функции  $f(x) = \frac{2^{x+1} - 2}{\ln(1 + x + x^2)}$  сколь

угодно мало отличаются от числа  $2 \ln 2$ , если значения аргумента  $x$  будут достаточно близкими к числу 0 (но  $x = 0 \notin \text{ООФ} \Rightarrow f(0)$  не существует).

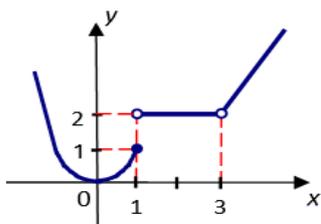
#### Задача 2

1)  $\alpha(x) = o(\beta(x))$  при  $x \rightarrow 2$ , то есть бесконечно малая функция  $\alpha(x)$  имеет более высокий порядок малости по сравнению с бесконечно малой функцией  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow 2$ ;

2)  $\alpha(x) = O(\beta(x))$  при  $x \rightarrow 1$ , то есть бесконечно малые функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow 1$  имеют одинаковый порядок малости.

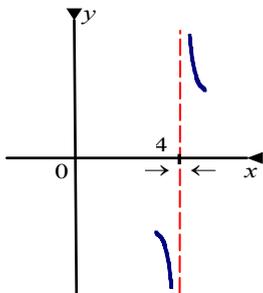
### Задача 3

1)



Функция  $y = f(x)$  является непрерывной при  $\forall x \in (-\infty; 1)$ ,  $\forall x \in (1; 3)$  и  $\forall x \in (3; +\infty)$ ; при  $x = 1$  функция имеет разрыв типа скачка, при  $x = 3$  – разрыв типа выколотой точки.

2)



Функция  $y = \frac{x^3 - 1}{x - 4}$  является непрерывной при  $\forall x \in (-\infty; 4)$  и при  $\forall x \in (4; +\infty)$ , имеет бесконечный разрыв в точке  $x = 4$ .

### Задача 4

Данный предел является верным:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2}$ , так как выполняется определение по Коши конечного предела функции в конечной точке:

$$\forall 0 < \varepsilon < 0,5 \exists \delta(\varepsilon) = \ln \frac{\varepsilon + 0,5}{0,5 - \varepsilon} \quad / \quad \left| \frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \quad \text{при } \forall x : 0 < |x| < \delta .$$

### Самостоятельная работа №7 (0-й вариант, раздел 4.1)

#### Задача 1

Найдите производные следующих функций:

1)  $y = \frac{2^x + 3x}{\arccos x}$ ;

2)  $y = \operatorname{tg} 4x - \frac{2}{\sqrt{x}} + \ln(x^2 + 1)$ ;

3)  $\varphi(x) = (\operatorname{ch}(x^2) - e^{-x} + 10)^4$ ;

4)  $f(x) = \ln^3(e^x + \sqrt[3]{1 + e^{2x}})$ .

#### Задача 2

Для функции  $y = f(x) : \begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t + t \sin t \end{cases}$  определите:  $y'_x$ ,  $y''_x$ ,  $y'_x \Big|_{t = \frac{\pi}{4}}$ .

#### Задача 3

Для функции, заданной неявно уравнением  $\sqrt{y} + x^2 y = 4x^3$ , определите  $y'_x$  и  $x'_y$ .

#### Задача 4

Известно, что  $y = \left( \frac{1}{x-4} \right)^{\sqrt{x}}$ . Найдите:

- 1) ООФ  $y(x)$ ,                      2)  $y'_x$ ,                      3) ООФ  $y'_x$ .

## Ответы к заданиям 0-го варианта самостоятельной работы №3

Задача 1

- 1)  $\frac{2^x + 3x}{\sqrt{1-x^2} \arccos^2 x} + \frac{3+2^x \ln 2}{\arccos x}$ ;
- 2)  $x^{-1,5} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4}{\cos^2 4x}$ ;
- 3)  $4(10 - e^{-x} + \operatorname{ch} x^2)^3 (e^{-x} + 2x \operatorname{sh} x^2)$ ;
- 4)  $f(x) = \frac{3 \left( e^x + 2e^{2x} 3(1+e^{2x})^{\frac{2}{3}} \right) \ln^2(e^x + \sqrt[3]{1+e^{2x}})}{e^x + \sqrt[3]{1+e^{2x}}}$ .

Задача 2

$$y'_x = t, \quad y''_{xx} = \frac{1}{\cos t}, \quad y'_x \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$$

Задача 3

$$y'_x = \frac{12x^2 - 2xy}{0,5y^{-0,5} + x^2}, \quad x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Задача 4

- 1) ООФ  $y(x) = (4; +\infty)$ ; 2)  $y'_x = y(x) \left( 0,5x^{-0,5} \ln \frac{1}{x-4} + x^{-0,5}(x-4) \right)$ ; 3) ООФ  $y'_x = (4; +\infty)$ .

## Вопросы по разделам к экзаменам и зачёту

### Разделы 1. «Основные структуры элементарной математики»

- 1 Числа и действия над ними.
- 2 Выражения и приемы их преобразований.
- 3 Равенства (тождества и уравнения).
- 4 Основные методы решения уравнений.
- 5 Неравенства относительно одной и двух неизвестных.
- 6 Основные свойства неравенств и методы их решений.
- 7 Системы уравнений или (и) неравенств.
- 8 Основные функции элементарной математики; последовательности, геометрическая и арифметическая прогрессия.

### Раздел 2. «Введение в математический анализ»

- 1 Множества, способы задания, основные операции.
- 2 Множества действительных чисел (аксиоматическое определение) и его стандартные подмножества.
- 3 Расширенная числовая прямая, окрестности её точек.
- 4 Ограниченность множеств, точные верхние и нижние грани.
- 5 Множества точек на координатной прямой и на координатной плоскости.
- 6 Отображение множеств (функция), виды отображений, суперпозиции отображений.
- 7 Понятие мощности множества.
- 8 Счетные множества.
- 9 Числовые функции, способы задания, основные характеристики.
- 10 Обратная функция, условия её существования и процедура нахождения, классификации функций.
- 11 Основные элементарные функции и их свойства.
- 12 Гиперболические функции.
- 13 Свойства целых многочленов и рациональных дробей.
- 14 Комплексные числа в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.
- 15 Арифметика комплексных чисел.
- 16 Множество точек на комплексной плоскости.
- 17 Свойства целых многочленов и решение простейших алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел.

### Раздел 3. "Предел и непрерывность функций одной переменной"

- 1 Определение числовой последовательности и ее предела. Сходящиеся и расходящиеся последовательности, примеры.
- 2 Основные свойства предела последовательности. Связь свойства ограниченности последовательности с ее пределом.
- 3 Определение и основные свойства бесконечно малых последовательностей.
- 4 Определение и основные свойства бесконечно больших последовательностей.
- 5 Теоремы о сходящихся последовательностях.
- 6 Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности. Определение числа  $e$ .
- 7 Определения предела функции по Гейне (на языке последовательностей), по Коши (на языке окрестностей), формальная запись на языке " $\varepsilon - \delta$ ".
- 8 Основные свойства функций, имеющих пределы: единственность предела, предел постоянной, переход к пределу в равенствах и неравенствах, предел зажатой функции, сохранение знака функцией, имеющей конечный предел.
- 9 Предел функции в точке по заданному множеству. Односторонние пределы функции в точке, их связь с обычным пределом в этой точке.
- 10 Определение бесконечно малых функций в точке  $x = a$ , их основные свойства. Теорема о связи функции, имеющей конечный предел, с этим пределом и бесконечно малой функцией (признак существования конечного предела функции в точке  $x = a$ ).
- 11 Бесконечно большие функции в точке  $x = a$ , их основные свойства.
- 12 Понятие локально ограниченной / неограниченной функции в точке  $x = a$ , связь этих свойств функции с ее пределом в точке  $x = a$ . Предел локально ограниченной монотонной функции.
- 13 Теоремы о конечных пределах функции. Понятие о неопределенностях. Правила раскрытия основных неопределенностей.
- 14 Замечательные пределы. Примеры раскрытия неопределенности  $[1^\infty]$ .
- 15 Сравнение бесконечно малых функций. Порядок малости одной бесконечно малой функции относительно другой.
- 16 Принцип замены эквивалентных бесконечно малых функций. Основные соотношения эквивалентностей бесконечно малых функций.
- 17 Определение функции, непрерывной в точке  $x_0$ . Точки разрыва функции и их классификация.
- 18 Основные свойства функций, непрерывных в точке  $x_0$ .
- 19 Основные свойства функций, непрерывных на замкнутом промежутке.

### Раздел 4. "Дифференциальное исчисление ФОП"

- 1 Определение производной, её механическая и геометрическая трактовки.
- 2 Связь непрерывности функции с её дифференцируемостью.
- 3 Основные правила дифференцирования: производные постоянной, суммы, произведения и дроби; производная сложной функции; производные обратной функции и функции, имеющей параметрическое задание; производная функции, заданной неявно; логарифмическое дифференцирование.
- 4 Таблица производных. Вывод производных основных элементарных функций.
- 5 Производные высших порядков. Физическая трактовка второй производной.
- 6 Определение касательной и нормали к плоской кривой, их уравнения.
- 7 Теоремы о средних значениях дифференцируемых функций. Доказательство теоремы Ферма и ее геометрическая трактовка.
- 8 Теоремы о средних значениях дифференцируемых функций. Доказательство теоремы Ролля. Следствие из теоремы Ролля.
- 9 Теоремы о средних значениях дифференцируемых функций. Доказательство теоремы Лагранжа и ее геометрическая трактовка. Формула Лагранжа для конечных приращений функции.
- 10 Теоремы о средних значениях дифференцируемых функций. Доказательство теоремы Коши. Связь теоремы Коши с теоремой Лагранжа.

- 11 Теорема Лопиталья: доказательство и обобщение на случай  $x \rightarrow \infty$ . Правило Лопиталья: формулировка, примеры.
- 12 Определение монотонно возрастающей (убывающей) функции. Признак монотонности дифференцируемой функции.
- 13 Определение локального экстремума функции. Необходимое условие локального экстремума и его недостаточность. Определение точки, подозрительной на экстремум. Первое достаточное условие для локального экстремума дифференцируемой функции.
- 14 Выпуклость, вогнутость, точки перегиба: определения, признак выпуклости или вогнутости графика дифференцируемой функции.
- 15 Необходимое условие для точки перегиба и его недостаточность. Определение точки, подозрительной на перегиб. Достаточное условие для точки перегиба.
- 16 Определение асимптоты линии. Нахождение вертикальных и наклонных (горизонтальных) асимптот графика функции.
- 17 Дифференциал функции: определение и основные свойства. Дифференциалы высших порядков.
- 18 Определение дифференциала функции и его приложения к приближенному вычислению значений функции и к нахождению погрешностей.
- 19 Формулы Тейлора и Маклорена.
- 20 Второе достаточное условие экстремума дважды дифференцируемой функции: формулировка, доказательство и примеры использования.
- 21 Вектор–функция скалярного аргумента, её дифференцирование.
- 22 Кривизна линии, центр кривизны, радиус кривизны, окружность кривизны. Эволюта и эвольвента.

## **Раздел 5. "Интегральное исчисление ФОП"**

- 1 Первообразная функции и неопределенный интеграл: определения, основные свойства.
- 2 Таблица неопределенных интегралов. Примеры табличного интегрирования.
- 3 Замена переменной интегрирования. Описания простейших случаев линейной замены переменной интегрирования. Примеры.
- 4 Метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле. Основные типы интегралов, которые эффективно находить с помощью формулы интегрирования по частям.
- 5 Рациональные дроби. Интегрирование простейших рациональных дробей. Алгоритм интегрирования любых рациональных дробей.
- 6 Неопределенные интегралы от некоторых тригонометрических и от некоторых иррациональных функций.
- 7 Определение определенного интеграла, его геометрическая и механическая трактовки, достаточные условия существования.
- 8 Теорема Барроу и следствия из нее.
- 9 Формула Ньютона-Лейбница: доказательство, примеры использования.
- 10 Основные свойства определенного интеграла. Доказательство свойств линейности, аддитивности, сравнения значений.
- 11 Основные свойства определенного интеграла. Вывод формул для оценки значения определенного интеграла.
- 12 Основные свойства определенного интеграла. Доказательство и геометрическая трактовка теоремы о среднем.
- 13 Формула интегрирования по частям и замена переменной интегрирования в определенном интеграле.
- 14 Вычисление площади фигуры с помощью определенного интеграла в декартовых и в полярных координатах.
- 15 Вычисление объемов тел вращения с помощью определенного интеграла.
- 16 Общая методика приложений определенного интеграла (в двух формах).
- 17 Вычисление длины дуги плоской кривой. Дифференциал длины дуги.
- 18 Несобственные интегралы I рода: определения, геометрические трактовки, достаточные условия сходимости или расходимости.
- 19 Несобственные интегралы II рода: определения, геометрические трактовки, достаточные условия сходимости или расходимости.

20 Интегралы, зависящие от параметра: определение, примеры, основные свойства.

### **Раздел 6. «Дифференциальное исчисление ФНП. Элементы векторного анализа».**

- 1 Определение функции нескольких переменных. Способы задания. Область определения. Графическое изображение функции двух переменных. Линии и поверхности уровня.
- 2 Предел и непрерывность функций нескольких переменных.
- 3 Частные приращения и частные производные функции нескольких переменных.
- 4 Полное приращение и полный дифференциал ФНП. Приложения полного дифференциала.
- 5 Производная сложной ФНП. Инвариантность формы полного дифференциала. Полная производная.
- 6 Производные функции, заданной неявно.
- 7 Формула Тейлора для функции двух переменных.
- 8 Экстремумы функции нескольких переменных.
- 9 Нахождение наибольшего и наименьшего значений ФНП в замкнутой ограниченной области.
- 10 Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности.
- 11 Скалярное поле. Поверхности и линии уровня. Производная по направлению.
- 12 Градиент скалярного поля и его основные свойства.

### **Раздел 7. «Интегральное исчисление ФНП»**

- 1 Двойной интеграл: определение, свойства, механическая и геометрическая трактовки.
- 2 Вычисление двойного интеграла в декартовых и в полярных координатах. Формула замены переменных в двойном интеграле.
- 3 Тройной интеграл: определение, свойства, механическая трактовка, вычисление в декартовых, в цилиндрических и в сферических координатах.
- 4 Приложения двойных и тройных интегралов к задачам геометрии и механики.
- 5 Криволинейные интегралы I рода: определение, основные свойства, вычисление, основные приложения.
- 6 Криволинейный интеграл II рода: определение, физическая трактовка, основные свойства, вычисление.
- 7 Формула Грина. Вычисление площади плоской фигуры с помощью криволинейного интеграла II рода.
- 8 Условия независимости криволинейного интеграла II рода от формы линии интегрирования.
- 9 Восстановление функции нескольких переменных по ее полному дифференциалу.
- 10 Поверхностные интегралы I рода: определение, основные свойства, вычисление, некоторые приложения.
- 11 Поверхностные интегралы II рода: определение, физическая трактовка, основные свойства, вычисление. Формулы Стокса и Остроградского-Гаусса.
- 12 Определение векторного поля. Векторные линии. Поток векторного поля через поверхность: определение, основные свойства, формулы для вычисления.
- 13 Дивергенция и ротор векторного поля: определения, основные свойства, формулы для вычисления. Формула Остроградского-Гаусса в векторной форме.
- 14 Векторный дифференциальный оператор Гамильтона. Дифференциальные векторные операции первого и второго порядков.
- 15 Работа и циркуляция векторного поля: определения, основные свойства циркуляции. Формула Стокса в векторной форме.
- 16 Потенциальные, соленоидальные и гармонические векторные поля: определения и основные свойства. Нахождение потенциала потенциального векторного поля.

### **Раздел 8. «Числовые и степенные ряды. Элементы гармонического анализа».**

- 1 Числовые ряды: определение, сходимость, расходимость, необходимый признак сходимости.
- 2 Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.
- 3 Достаточные признаки сходимости знакопеременных (знакопеременных) рядов. Абсолютная и условная сходимости.
- 4 Основные свойства числовых рядов. Приближённые вычисления суммы числового ряда.
- 5 Функциональные ряды. Понятие о равномерной сходимости.
- 6 Степенные ряды: теорема Абеля, область сходимости, радиус сходимости.
- 7 Ряды Тейлора и Маклорена.

- 8 Разложение в ряды Маклорена некоторых элементарных функций.
- 9 Основные приложения степенных рядов.
- 10 Гармоники, тригонометрические ряды. Ряд Фурье для периодической функции с периодом  $T = 2\pi$ . Теорема Дирихле.
- 11 Ряды Фурье для чётных или нечётных функций, для функций с произвольным периодом и для функций, заданных на конечном промежутке.
- 12 Ряд Фурье в комплексной форме. Амплитудный и фазовый дискретные спектры периодической функции.
- 13 Интеграл Фурье. Преобразования Фурье. Амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики непериодической функции.

### **Курсовая работа**

Список тем курсовой работы:

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения в задачах о колебании тока в электрической цепи
2. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений в задачах моделирования взаимодействия популяций живых организмов
3. Обыкновенные дифференциальные уравнения в задачах о вытекании жидкости из сосуда
4. Дифференциальное исчисление вектор-функции скалярного аргумента
5. Математическое моделирование с использованием дифференциальной геометрии линий
6. Обыкновенные дифференциальные уравнения в задачах о распространении эпидемий
7. Обыкновенные дифференциальные уравнения в задачах о колебании механической системы
8. Обыкновенные дифференциальные уравнения в задачах о траектории светового луча в жидкостях
9. Интегралы, зависящие от параметра
10. Приложения интегрального исчисления в задачах физики
11. Обыкновенные дифференциальные уравнения в математических моделях боевых действий
12. Обыкновенные дифференциальные уравнения в законах Кеплера о движении планет
13. Методы решения экстремальных задач для функций нескольких переменных
14. Моделирование задач о колебании маятника с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений
15. Дифференциальное и интегральное исчисление в задачах экономики
16. Приложения обыкновенных дифференциальных уравнений к решению геометрических задач
17. Элементы дифференциальной геометрии поверхностей
18. Моделирование некоторых процессов загрязнения окружающей среды